УДК: 528:51:378; JEL classification I21, I23, C02 DOI: https://doi.org/10.36887/2415-8453-2026-1-6

Боднарук Світлана Богданівна[1],
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та інформатики

Мельник Антон Анатолійович[1], кандидат географічних наук, доцент кафедри геодезії, картографії та управління територіями

[1]*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, (м. Чернівці, Україна)*

Bodnaruk Svitlana[1], Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Algebra and Informatics,
https://orcid.org/0000-0002-4979-7669

Melnyk Anton, Candidate of Geographical Sciences, Associate Professor of the Department of Geodesy, Cartography and Territorial Management,
https://orcid.org/0000-0002-1840-974X

[1]*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University (Chernivtsi, Ukraine)*

ІНТЕГРАЦІЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ ТА ФАХОВИХ ЗНАНЬ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ»
INTEGRATION OF FUNDAMENTAL MATHEMATICAL TRAINING AND PROFESSIONAL KNOWLEDGE DURING THE STUDY OF THE DISCIPLINE "MATHEMATICAL PROCESSING OF GEODETIC MEASUREMENTS"

Боднарук С. Б., Мельник А. А. Інтеграція фундаментальної математичної підготовки та фахових знань під час вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів». *Український журнал прикладної економіки та техніки*. 2026. Том 11. № 1. С. 38 – 43.

Bodnaruk S., Melnyk A. Integration of fundamental mathematical training and professional knowledge during the study of the discipline "Mathematical processing of geodetic measurements." *Ukrainian Journal of Applied Economics and Technology*. 2026. Volume 11. № 1, pp. 38 – 43.

Стаття присвячена проблематиці змістовного поєднання фундаментальної математики із прикладними аспектами курсу «Математична обробка геодезичних вимірів». Відірваність теорії від практики у навчальних планах стає причиною того, що студенти засвоюють знання формально, не вбачаючи за складними формулами реального інженерного змісту.Проаналізовано, як саме апарат лінійної алгебри, аналітичної геометрії та статистики трансформується у надійний інструмент для врівноваження мереж та оцінки похибок. У роботі акцентовано на необхідності живої методичної співпраці між математиками та профільними фахівцями-геодезистами, адже саме такий тандем дозволяє перетворити абстрактне моделювання на прикладні рішення. Наведений у статті приклад врівноваження мережі наочно ілюструє, як міждисциплінарні зв'язки «вмикають» аналітичне мислення майбутнього інженера, роблячи його справді конкурентним на сучасному ринку праці.

Ключові слова: *математична обробка геодезичних вимірів, метод найменших квадратів, теорія похибок, середня квадратична похибка, міждисциплінарний підхід, методика викладання, вища математика.*

For a student of Geodesy and Land Management, Higher Mathematics is not merely an academic subject but the fundamental language through which the entire profession is structured. Without a solid mathematical background, a geodesist risks becoming only a technical operator rather than a competent engineer capable of analytical thinking and responsible decision-making. Geodetic observations are inevitably accompanied by measurement errors. High-precision surveys involve redundant observations, leading to overdetermined systems of equations that must be rigorously adjusted. The method of least squares and mathematical statistics, therefore, become central tools in professional practice. However, the effectiveness of these methods depends directly on students' understanding of linear algebra, differential calculus, and probability theory. The existing gap between abstract mathematical theory and applied geodetic practice remains a significant methodological challenge in higher education. Isolated instruction in mathematical and professional disciplines often prevents students from developing an integrated system of knowledge. This paper substantiates the necessity of interdisciplinary cooperation between mathematics and geodesy instructors to ensure coherent development of professional competence. Emphasis is placed on demonstrating the practical interpretation of matrices, covariance analysis, eigenvalues, and error ellipses within real geodetic adjustment problems. Integrating fundamental mathematics with applied geodetic training enhances students' motivation, analytical skills, and professional responsibility, transforming mathematical rigor into a practical engineering instrument rather than a purely theoretical construct.

Keywords: *mathematical processing of geodetic measurements, least squares method, error theory, mean square error, interdisciplinary approach, teaching method, higher mathematics.*

Вступ

Для студента-геодезиста «Вища математика» – це не просто один із предметів, а фундаментальна мова, якою «написана» вся його професія. Без глибокого розуміння математики геодезист перетворюється з інженера на простого оператора приладу.

Математична освіта для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій» є ключовою з огляду на головні завдання геодезиста: опис форми Землі та систем координат. Так як Земля – це не ідеальна куля, то для її опису (у вигляді еліпсоїда, геоїда) та створення систем координат потрібні аналітична та диференціальна геометрія: для опису складних кривих поверхонь, якими є еліпсоїд та геоїд; сферична тригонометрія: для розрахунків на кривій поверхні Землі, адже звичайна тригонометрія тут дає великі похибки.

Під час геодезичних спостережень, особливо при високоточних дослідженнях, важливо виміряти та визначити кількісні показники декілька разів або ж з різних опорних станцій. Тому, природньо, що такі вимірювання завжди супроводжуються похибками, а сама кількість проведених вимірювань (визначення горизонтальних і вертикальних кутів, відстаней, перевищень, координат об'єктів і т.п.) завжди більша, ніж мінімально необхідно, що впливає на трудомісткість самого процесу і кінцевий результат.

На наше переконання, проблема поєднання математичної теорії та геодезичної практики залишається одним із найскладніших методичних викликів для вищої школи. Адже ефективність використання сучасних методів (насамперед методу найменших квадратів та математичної статистики) залежить від того, наскільки студент засвоїв їхній фундаментальний математичний базис.

Ефективне навчання студента-геодезиста – це багатоступеневий процес, який вимагає злагодженої роботи декількох кафедр. У Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича на географічному факультеті студенти спеціальності «Геодезія та землеустрій» ОП «Геодезія та землеустрій» на першому курсі навчання слухають (один семестр) дисципліну «Вища математика», а на третьому році навчання – «Математичну обробку геодезичних вимірів». Сучасні законодавчі та нормативні вимоги впливають не лише на зменшення кількості годин з окремих ключових основних дисциплін (здебільшого за рахунок об'єднання дисциплін), а й призводять до викладання викладачами кафедри підготовки відповідної спеціальності тих дисциплін, які є рідними для інших кафедр або ж знаходяться на стику різних наук, спеціальностей. У нашому випадку пререквізитами вивчення дисципліни

«Математична обробка геодезичних вимірів» є математичні дисципліни що вивчаються у школі та закладах вищої освіти. Тому співпраця викладачів кафедр алгебри та інформатики, геодезії, картографії та управління територіями є важливою та закономірною. Якщо цієї синергії немає, студент отримує два окремі, не пов'язані предмети, а не єдину систему знань.

Аналіз напрацювань світової наукової спільноти підтверджує, що розрив між фундаментальною математичною підготовкою та прикладним професійним інструментарієм є одним із викликів сучасності. Європейське товариство інженерної освіти (SEFI) вбачає розв'язання цієї проблеми у системному впровадженні STEM-концепцій. За такого підходу математичний апарат розглядається не як самоціль, а як гнучкий засіб інтерпретації та моделювання складних прикладних процесів, що є критично важливим для формування професійного світогляду інженера.

Дослідники A. Crawly та E. Malmqvist у концепції CDIO (Conceive-Design-Implement-Operate) наголошують, що розрив між абстракцією та практикою є причиною зниження мотивації студентів інженерних спеціальностей [14].

В Україні питання методики викладання математичної обробки геодезичних вимірів висвітлено у працях таких вчених, як С. П. Войтенко, П. М. Зазуляк, І. С. Тревого. Вони акцентують увагу на алгоритмізації обчислень та використанні методу найменших квадратів (МНК) [4; 6].

Втім, не можна ігнорувати очевидний розрив у наявних методичних підходах. Ми бачимо таку дивну ситуацію: фундаментальні праці зазвичай перевантажені абстрактними статистичними моделями, тоді як прикладні посібники зводяться до простого опису польових алгоритмів. Через таку однобічність виникає змістовна прірва, і студент просто не розуміє, де саме теоретична статистика перетинається з реальною роботою «в полі». Саме подолання цього бар'єру між сухою теорією та механічним виконанням інструкцій і є нашим головним завданням.

Аналіз наявних джерел свідчить також про дефіцит педагогічних досліджень, де математичні дисципліни (лінійна алгебра, аналітична геометрія) розглядаються не просто як обчислювальний апарат, а як основа для розв'язання прикладних геодезичних задач. Попри широку базу вітчизняних локальних методичних розробок з математики для технічних дисциплін, спостерігається дефіцит навчальних матеріалів, що забезпечують фундаментальну математичну підготовку через призму фахової міжпредметної інтеграції [1; 2; 3; 5; 9].

Водночас цікавою з цієї точки зору є робота М. Б. Ковальчук, де обґрунтовано модель професійної спрямованості викладання математики як інтеграційної основи підготовки інженерів (НПУ ім. Драгоманова, 2021). Експериментально доведено ефективність алгоритмічних технологій та ІКТ [7].

Формулювання цілей статті

Метою статті є обґрунтування необхідності інтеграції фундаментальної математичної підготовки та фахових геодезичних знань під час вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів», а також визначення ролі міждисциплінарної взаємодії викладача вищої математики та викладача геодезичних дисциплін у формуванні професійних компетентностей майбутніх фахівців-геодезистів.

Для досягнення поставленої мети у статті передбачається розв'язання таких завдань: проаналізувати місце фундаментальних математичних дисциплін у системі професійної підготовки студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій»; визначити ключові математичні розділи (лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія ймовірностей), знання яких є необхідними для засвоєння методів математичної обробки геодезичних вимірювань; обґрунтувати педагогічну доцільність інтегрованого підходу до викладання математичних і фахових дисциплін у підготовці геодезистів; показати роль взаємодії викладача вищої математики та викладача геодезії у формуванні цілісного розуміння студентами математичних методів та їх прикладного застосування.

Виклад основного матеріалу дослідження

Викладач математики для студента-геодезиста виступає в ролі «архітектора фундаменту»: роль викладача вищої математики – «Чому це працює?». Він закладає теоретичну базу, надаючи студенту універсальний набір інструментів та доводячи, що ці інструменти є надійними. Його відповідальність полягає у забезпеченні математичної строгості із фокусуванням уваги студентів не на конкретній геодезичній задачі, а на загальних властивостях моделі.

Викладач математики формулює фундаментальну тезу про те, що система лінійних рівнянь з рівною кількістю невідомих має єдиний розв'язок лише за умови нерівності визначника матриці коефіцієнтів нулю. У разі ж його нульового значення система переходить у стан лінійної залежності. На цьому етапі студент зосереджений на опануванні «математично чистого» інструментарію. Він вчиться розпізнавати логіку лінійної залежності та відпрацьовує техніку знаходження оберненої матриці. Власне, саме тут у студента має статися перелом у сприйнятті. У цей момент має з'явитись усвідомлення того, що математична строгість – це не якась примха викладача, а його власна безпека. Коли майбутній інженер нарешті визначає внутрішню логіку методу, будь-який страх помилитися в цифрах просто відпадає. Адже надійність результату з'являється не з повітря, а завдяки чіткому дотриманню математичних правил.

Роль викладача геодезії – інженер-практик. Він дає відповідь на питання – «Як і де це використати?». Він бере «чисті» математичні інструменти і показує, як вони працюють у складному реальному світі, повному похибок вимірювань та неідеальних умов. Його зона відповідальності: забезпечити практичну апробацію (застосування) із фокусом на адаптації теоретичної моделі до конкретної прикладної задачі.

Проілюструємо це на прикладі фахової інтерпретації. Викладач геодезії демонструє студентам, що стандартна математична система $AX = B$ у геодезичній практиці набуває вигляду $V = AX - L$. Тут кожна складова отримує свій фізичний зміст: матриця A постає як матриця проєктування, вектор X містить невідомі координати, L – це результати вимірювань (кутів чи відстаней), а V відображає неминучі похибки або нев'язки. Саме в цей момент абстрактне знання перетворюється на інженерний досвід. Те, що в курсі алгебри називали нульовим визначником, для геодезиста стає діагнозом – геометричною нестійкістю мережі (як у випадку спроби зробити засічку лише з одного напрямку). Таким чином, математична «лінійна залежність» у фаховому контексті стає синонімом грубої помилки у проєкті. Завдяки такій синергії студент бачить таку повну картину: математик дає йому надійний «молот» матричної алгебри, доводячи якість його «сталі» через теореми, а геодезія вчить професійно використовувати цей інструмент для врівноваження мереж через МНК, трансформації координат та прецизійного оцінювання GNSS-спостережень.

Без першого етапу (математики) геодезист стає «оператором», що сліпо натискає кнопки в програмі. Він не знає, чому програма видала помилку. Без другого етапу (геодезії, математичної обробки геодезичних вимірів) математика залишається для студента абстрактною «вищою матерією», яка забувається одразу після іспиту і ніяк не пов»язується з майбутньою професією.

Окремої уваги потребує деталізація тих розділів математичного циклу, що складають професійний фундамент майбутнього інженера. Наприклад, теорія ймовірностей та математична статистика виступають не просто допоміжними дисциплінами, а єдиним інструментом для об'єктивного оцінювання точності результатів. Справжня кваліфікація геодезиста виявляється не у вмінні обчислити координату як таку, а в здатності аргументовано підтвердити ступінь довіри до отриманих даних – завдання, яке без глибокого знання статистичного апарату не має фахового розв'язку. Логічним продовженням цього є метод найменших квадратів (МНК), який справедливо називають «серцем» сучасної геодезичної обробки. МНК постає як інтелектуальний місток, що дозволяє знайти найбільш імовірні значення шуканих величин, гармонізуючи сукупність неминуче суперечливих вимірювань у єдину узгоджену систему [15–17].

Базисом для опанування методів математичної обробки вимірів є лінійна алгебра (матриці). МНК неможливо реалізувати для великих мереж (навіть з 10 точок) без матриць [12; 13]. Уся обробка геодезичних даних в програмному забезпеченні – це розв'язання гігантських матричних рівнянь. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: перехід між системами – це суто матричні операції (поворот, зсув, масштабування).

Перетворення координат та картографічні проєкції: вимірювання зроблені в одній (наприклад, місцевій) системі координат, а кадастр ведеться в іншій (наприклад, УСК-2000), GPS дає координати у третій (WGS-84). Необхідні математичні розуміння під час переходу між системами координат.

Вагому роль у підготовці фахівця відіграє математичний аналіз, особливо в контексті картографічних проєкцій (зокрема Гаусса-Крюгера). Цей складний процес «розгортання» криволінійної поверхні земного еліпсоїда на площину базується на апараті диференціальних рівнянь та інтегральному численні. Без розуміння цих основ студент сприйматиме карту лише як статичне зображення, а не як результат складного математичного моделювання.

Не менш важливою є математична складова у роботі з новітніми технологіями, як-от GNSS чи LiDAR. Сучасні сканери здатні генерувати мільйони точок за лічені хвилини, проте «сира» хмара точок ще не є кінцевим результатом. Процеси фільтрації шумів, розпізнавання мікрорельєфу чи автоматичне виділення контурів будівель цілком базуються на складних алгоритмах цифрової обробки сигналів та просторової геометрії, що лежать у «двигуні» спеціалізованого програмного забезпечення. Фахівець, позбавлений математичного базису, здатен лише на репродуктивну роботу за інструкцією. Натомість глибоке розуміння математики трансформує геодезиста у стратега, здатного до усвідомленого планування складних проєктів, критичного оцінювання точності та гнучкої адаптації до нових технологій. В основі будь-якого сучасного інструментарію лежать незмінні математичні принципи. Попри очевидну важливість, бар'єром часто є абстрактність математичних категорій, що спонукає до перегляду акцентів у викладанні ключових розділів, зокрема лінійної алгебри.

У контексті підготовки до курсу «Математична обробка геодезичних вимірів», наприклад, матричне числення має подаватися не як формальна маніпуляція числами, а як мова опису об'єктивної реальності. Зокрема, вивчаючи системи рівнянь, вкрай важливо змістити фокус із методу Гаусса на природу перевизначених систем ($n > m$). Саме вони є математичним відображенням надлишкових вимірювань у геодезичних мережах, де пошук істини вимагає не просто розв'язку, а фахового врівноваження [4; 8; 10].

Проілюструємо викладені тези на конкретному прикладі – математичній обробці нівелірного ходу. Такий варіант із трьома вимірами дозволяє чітко простежити механізм переходу від «сирих» польових даних до врівноважених значень висот через апарат лінійної алгебри.

Умова задачі: маємо два репери з відомими висотами:

$$H_1 = 120.000 \text{ м}, \qquad H_2 = 121.500 \text{ м}.$$

Польові виміри перевищень між точками:

$$h_1 = +0.510 \text{ м} \quad (\text{від Рп1 до A}), \qquad h_2 = +1.200 \text{ м} \quad (\text{від A до B}),$$
$$h_3 = -0.205 \text{ м} \quad (\text{від B до Рп2}).$$

Побудова спостережних рівнянь. Нехай $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix}$. Для наших вимірів маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} H_1 + h_1 \\ h_2 \\ H_2 - h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120.510 \\ 1.200 \\ 121.705 \end{pmatrix}.$$

Нормальні рівняння МНК. Нормальна матриця та вектор:

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 \end{pmatrix}, \qquad U = A^T \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 119.310 \\ 122.905 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок нормальних рівнянь: $\mathbf{x} = N^{-1} U = \begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120.508333 \\ 121.706667 \end{pmatrix}$ м.

Вектор залишків (відхилень): $\mathbf{v} = \mathrm{l} - A\mathrm{x} = \begin{pmatrix} +1.666667e-03 \\ +1.666667e-03 \\ -1.666667e-03 \end{pmatrix}$ м.

Перевірка суми вимірів. Сума польових перевищень: $h_1 + h_2 + h_3 = +1.505$ м. Теоретична різниця: $H_2 - H_1 = +1.500$ м. Нев'язка (сума) = +0.005 м.

Відповідь: $H_A = 120.508$ м, $H_B = 121.707$ м.

Примітка. Розв'язання наведено методом найменших квадратів, нев'язки розподілено між усіма спостереженнями відповідно до моделі спостережень.

Для того, щоб остаточно зруйнувати міф про «відірваність» математики від практики, варто розглянути кейс, де знання матриць підкріплюються апаратом аналітичної геометрії [1; 5]. Розв'язання задачі на побудову рівняння площини за результатами надлишкових вимірювань – це ідеальний місток між теорією та професійною діяльністю. На цьому етапі студент усвідомлює, що матричні обчислення – це лише інструмент, а справжня мета – побудова точної геометричної моделі простору. З огляду на методику, таку задачу доцільно впроваджувати після опанування не лише матричної алгебри, а й базових елементів аналітичної геометрії, що дозволяє студенту комплексно підійти до інтерпретації інженерних даних.

Задача: апроксимація площини за результатами польових вимірів. Маємо результати польових вимірів висот z у чотирьох пунктів з відомими координатами (x, y):

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= (0{,}0{,}100.12), \\ (x_2, y_2, z_2) &= (10{,}0{,}100.55), \\ (x_3, y_3, z_3) &= (0{,}8{,}101.02), \\ (x_4, y_4, z_4) &= (10{,}8{,}101.48). \end{aligned}$$

Потрібно знайти параметри площини $z = ax + by + c$ через МНК.
Побудова системи. Запишемо модель в матричній формі $A\,\mathbf{p} = \mathbf{l}$, де

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Для наших даних матриці мають вигляд: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 100.12 \\ 100.55 \\ 101.02 \\ 101.48 \end{pmatrix}.$

Нормальні рівняння:

$$N = A^T A = \begin{pmatrix} 200.00 & 80.00 & 20.00 \\ 80.00 & 128.00 & 16.00 \\ 20.00 & 16.00 & 4.00 \end{pmatrix}, \quad U = A^T\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 2020.30 \\ 1620.00 \\ 403.17 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок нормальних рівнянь: $\mathbf{p} = N^{-1}U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.044500 \\ 0.114375 \\ 100.112500 \end{pmatrix}.$

Оцінка якості апроксимації. Вектор залишків:

$$\mathbf{v} = A\mathrm{p} - \mathrm{l} = \begin{pmatrix} -0.007500 \\ +0.007500 \\ +0.007500 \\ -0.007500 \end{pmatrix}.$$

Оцінка дисперсії одиниці ваги: $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}{n-u} = 2.250000e - 04.$

Коваріаційна матриця параметрів: $\mathrm{Cov}(\mathbf{p}) = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 2.250000e-06 & -2.498002e-22 & -1.125000e-05 \\ -2.602085e-22 & 3.515625e-06 & -1.406250e-05 \\ -1.125000e-05 & -1.406250e-05 & 1.687500e-04 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримані параметри площини:

$$a = 0.044500, \quad b = 0.114375, \quad c = 100.112500.$$

При вивченні понять визначника, оберненої матриці та рангу матриці акцентуємо увагу на тому, що поняття виродженої (сингулярної) матриці використовується при аналізі жорсткості та стійкості геодезичної мережі (якщо нормальна матриця N вироджена, то мережа не має однозначного розв'язку). А саме близький до нуля визначник у геодезичній мережі свідчить про погану конфігурацію мережі (гострі кути засічок), що призводить до різкого зростання похибок при оберненні матриці нормальних рівнянь.

Студенти-геодезисти часто сприймають розділ «Власні значення та власні вектори» як суто теоретичний розділ в курсі математики. Тому важливо показати, що це поняття відбувається у професійних задачах: аналіз точності координат, еліпси похибок, оцінка якості геодезичної мережі. У зв'язку з цим мета викладача – пов'язати математичний апарат лінійної алгебри з практичними завданнями геодезії через коваріаційну матрицю та еліпс похибок.

Наведемо покроковий алгоритм подачі цього матеріалу на занятті з вищої математики.

1. Основні математичні поняття та твердження.

1) базове означення: записуємо рівняння: $\mathrm{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, де А – квадратна матриця, $\boldsymbol{v}$ – ненульовий вектор (власний вектор), λ – власне значення. Тут варто наголосити студентам, що це ті вектори, які при лінійному перетворенні не змінюють напрям, а лише «розтягуються/стискаються» у λ разів.

2) простий приклад 2×2: викладач розглядає конкретну матрицю 2×2 і разом зі студентами: записує характерне рівняння: $\mathrm{d}et\,(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$; знаходить два власних значення; для кожного значення знаходиться відповідний власний вектор $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Важливо підкреслити, що коли власні значення різні, то власні вектори лінійно незалежні.

3) особливість симетричних матриць: викладач формулює ключовий факт, потрібний саме геодезистам: якщо матриця симетрична, всі власні значення – дійсні; власні вектори, які мають різні власні значення, можна вибрати ортогональними.

Коментар для геодезистів: коваріаційні матриці є симетричними, тому їх можна «розкласти» за взаємно перпендикулярними напрямками.

2. Перехід до геодезії: коваріаційна матриця.

1) коваріаційна матриця координат точки: після зрівнювання для МНК точність координат точки описується матрицею:(X, Y)

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{X}}^2 & \sigma_{\mathrm{X}Y} \\ \sigma_{\mathrm{X}Y} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Викладач наголошує, що:

- $\sigma_{\mathrm{X}}^2, \sigma_Y^2$ – дисперсії (квадрати СКП) координат X та Y;
- $\sigma_{\mathrm{X}Y}$ – коваріація між X та Y (показує, чи «помилки йдуть разом»);
- матриця симетрична: $\sigma_{\mathrm{X}Y} = \sigma_{Y\mathrm{X}}$.

2) геометрична інтерпретація коваріаційної матриці: викладач підводить до ідеї: коваріаційна матриця задає форму і орієнтацію еліпса похибок.

Інтуїція для студентів: якщо $\sigma_{\mathrm{X}Y} = 0, \quad \sigma_{\mathrm{X}}^2 = \sigma_Y^2$ – отримуємо «коло»; якщо $\sigma_{\mathrm{X}Y} \neq 0$ – еліпс «повертається», з'являється «прив'язка» похибок до певних напрямів.

Таким чином, ми приходимо до фундаментального для геодезичної практики висновку щодо природи симетричних матриць. Оскільки всі їхні власні значення є лише дійсними числами, у статистичному сенсі вони безпосередньо визначають величини дисперсій вздовж головних ортогональних осей еліпса похибок. Ця математична закономірність слугує ключем до розуміння просторового розподілу точності, адже саме через власні значення ми отримуємо можливість чітко зорієнтувати еліпс у просторі та кількісно оцінити надійність положення геодезичного пункту за кожним із головних напрямків.

3. Власні значення та власні вектори коваріаційної матриці.

1) власні вектори як напрямки головних осей еліпса похибок: викладач формулює геодезичний зміст: власні вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ матриці – це напрями великої та малої півосей еліпса похибок; ці напрями взаємно ортогональні (перпендикулярні), що відповідає симетричності.

2) власні значення як міра розкиду похибок уздовж осей: викладач підкреслює: власне λ_1, λ_2значення – це дисперсії уздовж напрямів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; СКП уздовж осей: .$\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$. Зв'язок із півосями еліпса похибок (для певної довірчої ймовірності): $a = к\sqrt{\lambda_1}, b = к\sqrt{\lambda_2}$, де a – велика піввісь, , b – мала піввісь, к – коефіцієнт, що залежить від обраного рівня довіри (наприклад, для 95% – близько 2.45).

4. Висновки, що може зробити студент-геодезист.

1) напрямки найгіршої та найкращої точності: власний вектор, що відповідає більшому власному значенню (λ_{max}), указує напрям, у якому точність найгірша (найбільший розкид); власний вектор, що відповідає меншому власному значенню (λ_{min}), указує напрям, у якому точність є найкращою.

Викладач робить акцент на тому, що це не просто «абстрактні вектори», а конкретні геометричні напрями у плані, за якими оцінюють надійність мережі.

2) форма еліпса як індикатора якості мережі: якщо $\lambda_1 \approx \lambda_2$ – еліпс близький до кола: точність приблизно однакова в усіх напрямках; бажана ситуація, зокрема для GNSS-вимірювань. Якщо $\lambda_1 \gg \lambda_2$ – еліпс витягнутий: у певному напрямі похибка значно більша; це сигнал слабого напряму мережі, характерний, наприклад, для кінців витягнутих полігонометричних ходів.

3) практична цінність для студента: стає зрозумілим, що формули з курсу вищої математики виконуються під час аналізу результатів порівняння; власні значення допомагають не тільки «рахувати», а й інтерпретувати якість вимірювань; розуміння лінійної алгебри підвищує компетентність геодезиста.

Таким чином, на заняттях з вищої математики доцільно: не обмежуватися абстрактними прикладами з довільними матрицями; демонструвати конкретний перехід: матриця → власне значення та вектори → коваріаційна матриця → еліпс похибок. Така подача забезпечить мотивацію для студентів, покаже, що вища математика є робочим інструментом, а не лише формальною дисципліною.

Розділ «Диференціальне числення» є критичним для розуміння студентами лінеаризації та поширення похибок. Наприклад, частинні похідні застосовуються для обчислення коефіцієнтів у матриці проєктантів та лінеаризації нелінійних рівнянь (формули для відстаней чи азимутів) навколо наближених значень. Саме вільне володіння теорією диференціального числення функцій багатьох змінних є основою для розуміння методу МНК. З вищої математики викладач акцентує увагу на тому, що прирівнювання частинних похідних до нуля – це шлях до знаходження мінімуму суми квадратів похибок.

Розділ, присвячений теорії ймовірностей та математичній статистиці, закладає фундамент для розуміння природи геодезичних похибок та об'єктивного оцінювання достовірності отриманих результатів. У таблиці 1 систематизовано ключові акценти, які викладач математики може інтегрувати у свої заняття заради наочної демонстрації взаємозв'язку між абстрактними статистичними поняттями та реальними потребами геодезичної галузі.

Таблиця 1 Взаємозв'язок термінів, понять та тверджень теорії ймовірностей та математичної статистики із геодезією

Термінологія	Акцент викладача	Зв'язок із геодезією
Випадкові величини	Класифікація похибок: систематичні (потребують виключення) та випадкові (моделюються статистично).	Розуміння того, що геодезичні вимірювання — це випадкові величини.
Нормальний розподіл	Закон Гауса як модель розподілу випадкових похибок. Роль середньої квадратичної похибки (СКП).	Оцінка точності вимірювань та інтервалів достовірності. Обґрунтування МНК базується на припущенні про нормальний розподіл похибок.
Кореляція та коваріація	Поняття коваріаційної матриці C.	Оцінка точності зрівняних параметрів. Елементи матриці C дають інформацію про СКП координат та їхній взаємозв'язок (кореляцію).
Зважені оцінки	Введення поняття ваги p, вимірювання як величини, обернено пропорційної дисперсії.	Обробка різноточних вимірювань (наприклад, у GNSS-технологіях, де різні супутникові спостереження мають різну точність).

Джерело: розроблено авторами.

Висновки та перспективи подальших розвідок

Інтеграція фундаментальної математичної підготовки та фахових знань є необхідною умовою якісного засвоєння дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів», оскільки саме математика формує теоретичну основу для розуміння методів оцінювання точності та обробки результатів геодезичних спостережень. Ізольоване вивчення математичних дисциплін без їх подальшого зв'язку з професійними задачами геодезії призводить до формального засвоєння знань та ускладнює розуміння прикладного змісту методу найменших квадратів, теорії похибок і статистичних моделей вимірювань.

Практичне значення дослідження полягає в можливості використання наведених висновків під час вдосконалення навчальних програм, розроблення спільних методичних матеріалів та координації роботи кафедр, що забезпечують підготовку фахівців за спеціальністю «Геодезія та землеустрій».

Література

1. Боднарук С. Б., Городецький В. В., Колісник Р. С. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах: навч. посіб. 2-ге вид., виправлене і доповнене. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т 2024. 354 с.
2. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 1 : навч посіб. Вінниця : ВНТУ, 2019. 103 с. URL: http://ir.lib.vntu.edu.ua//handle/123456789/33882
3. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2 : Вінниця: ВНТУ, 2023. 102 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2023/Pratsovit_P2_2023_102.pdf
4. Войтенко С. П., Шульц Р. В., Кузьмич О. Й., Кравченко Ю. В. Математичне оброблення геодезичних вимірів: підручник Київ : Знання. 2015. 654 с.
5. Городецький В. В., Боднарук С. Б., Довгей Ж. І., Лучко В. С. Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах. навч. посіб. 2-ге вид., виправлене і доповнене. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 408 с.
6. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань. / Зазуляк П. М., Гавриш В. І. та ін. Львів : Растр-7, 2007. 408 с.
7. Ковальчук М. Б. Професійна спрямованість навчання математики як інтеграційна основа фахової підготовки студентів інженерних спеціальностей: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.04. Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ, 2021. 582 с. http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/39513.

8. Крупела Л. М. Математична обробка геодезичних вимірів. Конспект лекцій. навч вид Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. 120 с. URL: https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi31/0025159.pdf
9. Лавренчук В. П., Настасієв П. П., Мартинюк О. В., Кондур О. С. Вища математика. Загальний курс. Ч.1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія: навч. посіб. Чернівці: Книги XXI, 2010. 319 с. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=S&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21FMT=fullwebr&S21ALL=%28%3C.%3EI%3D%21NBUV$%3C.%3E%29%2A%28%3C.%3EA%3D%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B4%D1%83%D1%80%20%D0%9E$%3C.%3E%29&Z21ID=&S21SRW=AVHEAD&S21SRD=&S21STN=1&S21REF=10&S21CNR=20&R21DBN=1&R21DBN=2
10. Мельник А. А. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посіб. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. 120 с.
11. Матеріали 28-ї Міжнародної науково-технічної конф. GEOFORUM'2025., Львів–Брюховичі, 9–11 квіт. 2025 р. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2025. 244 с. URL: https://zgt.com.ua/wp-content/uploads/2025/04/%D0%A2%D0%95%D0%97%D0%98_%D0%93%D0%95%D0%9E%D0%A4%D0%9E%D0%A0%D0%A3%D0%9C_2025.pdf
12. Метешкін К. О., Шаульський Д. В. Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів : навч. посіб.; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ, 2014. 100 с. URL: https://eprints.kname.edu.ua/35744/1/%D0%A8%D0%B0%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%9C%D0%9E%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%92%D0%B8%D0%BC.pdf
13. Рижок З. Р., Поляковська Л. Л., Ступень Р. М., Колодій П. П. Математична обробка геодезичних вимірів. навч. посіб. Львів:« Галицька видавнича спілка», 2020. 180 с. URL: https://repository.lnup.edu.ua/handle/123456789/4225
14. Crawley E. F., Malmqvist J., Östlund S., Brodeur D. R., Edström K. Rethinking Engineering Education: The CDIO Approach. Cham: Springer, 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05561-9.
15. Ligas M., Banasik P. Least Squares Collocation Alternative to Helmert's Transformation with Hausbrandt's Post-Transformation Correction. Reports on Geodesy and Geoinformatics vol. 97 /2014 pag. 23-34 URL: https://doi.org/10.2478/rgg-2014-0009.
16. Melnyk A., Darchuk K., Sukhyi P., Kostaschuk I., Lopushanskyi, O. Geodetic Support for the Use of Natural Resources of the Chernivtsi Region Using GIS. Grassroots Journal of Natural Resources, 2024. 7(3): 77-95. Doi: https://doi.org/10.33002/nr2581.6853.070305.
17. Teunissen P. J. G. Adjustment Theory: An Introduction. Delft Academic Press / VSSD Press, 2000; 3rd ed., 2024. DOI: https://doi.org/10.59490/tb.95.

References

1. Bodnaruk, S. B., Horodetskyi, V. V., & Kolisnyk, R. S. (2024). *Alhebra ta heometriia v teoremakh i zadachakh: navch. posib.* [Algebra and geometry in theorems and problems: Study guide] (2nd ed.). Chernivetskyi nats. un-t.
2. Pratsovytyi, M. V., Kovalchuk, M. B., & Sachaniuk-Kavetska, N. V. (2019). *Vyshcha matematyka. Oporni skhemy ta alhorytmy dlia samostiinoi roboty studentiv. Chastyna 1: navch posib.* [Higher mathematics. Key diagrams and algorithms for students' independent work. Part 1: Study guide]. VNTU. URL: http://ir.lib.vntu.edu.ua//handle/123456789/33882/.
3. Pratsovytyi, M. V., Kovalchuk, M. B., & Sachaniuk-Kavetska, N. V. (2023). *Vyshcha matematyka. Oporni skhemy ta alhorytmy dlia samostiinoi roboty studentiv. Chastyna 2* [Higher mathematics. Key diagrams and algorithms for students' independent work. Part 2]. VNTU. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2023/Pratsovit_P2_2023_102.pdf.
4. Voitenko, S. P., Shults, R. V., Kuzmych, O. I., & Kravchenko, Yu. V. (2015). *Matematychne obroblennia heodezychnykh vymiriv: pidruchnyk* [Mathematical processing of geodetic measurements: Textbook]. Znannia.
5. Horodetskyi, V. V., Bodnaruk, S. B., Dovhei, Zh. I., & Luchko, V. S. (2021). *Osnovy analitychnoi heometrii v teoremakh i zadachakh: navch. posib.* [Basics of analytical geometry in theorems and problems: Study guide] (2nd ed.). Chernivetskyi nats. un-t im. Yu. Fedkovycha.
6. Zazuliak, P. M., Havrysh, V. I., et al. (2007). *Osnovy matematychnoho opratsiuvannia heodezychnykh vymiriuvan* [Basics of mathematical processing of geodetic measurements]. Rastr-7.
7. Kovalchuk, M. B. (2021). *Profesiina spriamovanist navchannia matematyky iak intehratsiina osnova fakhovoi pidhotovky studentiv inzhenernykh spetsialnostei* [Professional orientation of mathematics teaching as an integration basis for professional training of engineering students] (Doctoral dissertation). Nats. ped. un-t im. M. P. Drahomanova. URL: http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/39513.
8. Krupela, L. M. (2010). *Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Konspekt lektsii: navch vyd* [Mathematical processing of geodetic measurements. Lecture notes: Study edition]. Chernivetskyi nats. un-t. URL: https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi31/0025159.pdf.
9. Lavrenchuk, V. P., Nastasiiev, P. P., Martyniuk, O. V., & Kondur, O. S. (2010). *Vyshcha matematyka. Zahalnyi kurs. Ch.1. Liniina alhebra i analitychna heometriia: navch. posib.* [Higher mathematics. General course. Part 1. Linear algebra and analytical geometry: Study guide]. Knyhy XXI. URL: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=S&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21FMT=fullwebr&S21ALL=%28%3C.%3EI%3D%21NBUV$%3C.%3E%29%2A%28%3C.%3EA%3D%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B4%D1%83%D1%80%20%D0%9E$%3C.%3E%29&Z21ID=&S21SRW=AVHEAD&S21SRD=&S21STN=1&S21REF=10&S21CNR=20&R21DBN=1&R21DBN=2.
10. Melnyk, A. A. (2022). *Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv: navch. posib.* [Mathematical processing of geodetic measurements: Study guide]. Chernivetskyi nats. un-t im. Yu. Fedkovycha.
11. *Materialy 28-i Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konf. GEOFORUM'2025* [Proceedings of the 28th International Scientific and Technical Conf. GEOFORUM'2025]. (2025). Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniky. URL: https://zgt.com.ua/wp-content/uploads/2025/04/%D0%A2%D0%95%D0%97%D0%98_%D0%93%D0%95%D0%9E%D0%A4%D0%9E%D0%A0%D0%A3%D0%9C_2025.pdf.
12. Meteshkin, K. O., & Shaulskyi, D. V. (2014). *Praktykum z matematychnoi obrobky heodezychnykh vymiriv: navch. posib.* [Workshop on mathematical processing of geodetic measurements: Study guide]. KhNUMH. URL: https://eprints.kname.edu.ua/35744/1/%D0%A8%D0%B0%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%9C%D0%9E%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%92%D0%B8%D0%BC.pdf.
13. Ryzhok, Z. R., Poliakovska, L. L., Stupen, R. M., & Kolodii, P. P. (2020). *Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. navch. posib.* [Mathematical processing of geodetic measurements. Study guide]. Halytska vydavnycha spilka. URL: https://repository.lnup.edu.ua/handle/123456789/4225.
14. Crawley, E. F., Malmqvist, J., Östlund, S., Brodeur, D. R., & Edström, K. (2014). *Rethinking engineering education: The CDIO approach*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05561-9.
15. Ligas, M., & Banasik, P. (2014). Least squares collocation alternative to Helmert's transformation with Hausbrandt's post-transformation correction. *Reports on Geodesy and Geoinformatics*, *97*, 23–34. URL: https://doi.org/10.2478/rgg-2014-0009.
16. Melnyk, A., Darchuk, K., Sukhyi, P., Kostaschuk, I., & Lopushanskyi, O. (2024). Geodetic support for the use of natural resources of the Chernivtsi region using GIS. *Grassroots Journal of Natural Resources*, *7*(3), 77–95. https://doi.org/10.33002/nr2581.6853.070305.
17. Teunissen, P. J. G. (2024). *Adjustment theory: An introduction* (3rd ed.). Delft Academic Press / VSSD Press. https://doi.org/10.59490/tb.95.

Стаття надійшла до редакції / Received 17.02.2026 **Прийнята до друку / Accepted 23.02.2026**
Опубліковано/ Published 25.02.2026