

**Вербицький Володимир Григорович,**

доктор фізико-математичних наук,  
професор, Університет Ковентрі,  
м. Ковентрі, Англія

**Мінаков Віталій Михайлович,**

кандидат економічних наук, доцент  
кафедри машинобудування, Одеська  
державна академія будівництва та  
архітектури, м. Одеса, Україна

**Місько Євген Михайлович,**

кандидат технічних наук, доцент  
кафедри машинобудування, Одеська  
державна академія будівництва та  
архітектури, м. Одеса, Україна

**Разбойніков Олександр**

**Олександрович,** кандидат технічних  
наук, кафедра автомобілів  
Національного транспортного  
університету, м. Київ, Україна

**Verbytskyy Volodymyr,**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor, Coventry University, Coventry, England,  
<https://orcid.org/0000-0002-1039-3548>

**Minakov Vitaly,**

PhD in Economical Sciences, Associate Professor,  
Odessa State Academy of Civil Engineering and  
Architecture, Odesa, Ukraine,  
<https://orcid.org/0000-0002-0087-503X>

**Misko Yevhen,**

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,  
Odessa State Academy of Civil Engineering and  
Architecture, Odesa, Ukraine,  
<https://orcid.org/0000-0002-9020-5266>

**Razboinikov Oleksandr,**

PhD in Technical Sciences,  
National Transport University, Kyiv, Ukraine,  
<https://orcid.org/0000-0003-3024-0999>

**ДО АНАЛІЗУ ПОБУДОВА ПРОСТОРОВОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ  
ДВОЛАНКОВОГО АВТОПОТЯГА З УРАХУВАННЯМ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ  
ANALYSIS OF THE CONSTRUCTION OF A PORT-STORM MATHEMATICAL MODEL OF A  
ARTICULATED TWO-LINK ROAD TRAIN REGARDING THE VERTICAL STORAGE**

Вербицький В. Г., Мінаков В. М., Місько Є. М.,  
Разбойніков О. О. До аналізу побудова  
просторової математичної моделі  
дволанкового автопотяга з урахуванням  
вертикальної складової. *Український журнал  
прикладної економіки та техніки.*  
2023. Том 8. № 2. С. 165 – 172.

Verbytskyy V., Minakov V., Misko Y,  
Razboinikov O. Analysis of the construction  
of a port-storm mathematical model of  
a articulated two-link road train regarding the  
vertical storage. *Ukrainian Journal of Applied  
Economics and Technology.*  
2023. Volume 8. № 2, pp. 165 – 172.

*У статті розглянуті можливі шляхи розвитку та удосконалення плоскої математичної моделі руху зчленованого дволанкового автопотяга з урахуванням колії, та доведення цієї моделі до просторової, яка могла б враховувати зміну вертикальних навантажень та наступну зміну бокових сил відведення, які впливають на показники поворотності та керованості зчленованого транспортного засобу. Ця стаття пропонує побудову просторової математичної моделі дволанкового автопотяга з урахуванням вертикальної складової. Автори розглядають проблеми, пов'язані з рухом дволанкового автопотяга по нерівностям терену та перепадами висот, які можуть виникати на трасі. Вони враховують вплив гравітаційної сили на рух потяга і розробляють математичну модель, яка описує цей процес. У статті представлені математичні рівняння, що описують рух дволанкового автопотяга у тривимірному просторі. Вони враховують масу потяга, сили тяги, опору повітря, гравітаційну силу і реакції від землі. Автори використовують числові методи для розв'язання цих рівнянь і проводять комп'ютерне моделювання для вивчення руху потяга в різних умовах. Результати дослідження демонструють, що вертикальна складова має значний вплив на рух дволанкового автопотяга. Вона може впливати на швидкість руху, енергоефективність та стійкість потяга. Автори роблять висновок про необхідність врахування вертикальної складової при побудові математичних моделей дволанкових автопотягів. Ця стаття має важливе значення для дослідників та інженерів, які працюють у галузі розробки та проектування автопотягів. Врахування вертикальної складової допоможе поліпшити точність математичних моделей і підвищити ефективність руху дволанкових автопотягів у реальних умовах експлуатації. Отримані результати мають важливе значення для розробки та вдосконалення систем управління дволанковими автопотягами, зокрема у галузях транспорту, логістики та мобільних роботів. Запропонована модель може бути використана для оптимізації траєкторії руху, підвищення ефективності та безпеки роботи автопотягів у реальних умовах. Запропонована модель розрахована на кругові стаціонарні та перехідні режими руху зчленованого автопотяга з наступною можливістю проведення порівняльного аналізу з натурним експериментом.*

**Ключові слова:** просторова математична модель, кругові режими, вертикальні коливання, зчленований автопотяг.

---

*The article considers possible ways of development and improvement of a flat mathematical model of the movement of an articulated two-link road train considering the track and bringing this model to a spatial model that could consider the change in vertical loads and the subsequent change in the lateral deflection forces, which affect the indicators of turning and controllability of the articulated vehicle. This article proposes constructing a spatial mathematical model of a two-link road train considering the vertical component. The authors consider the problems associated with the movement of a two-track train over uneven terrain and height differences that may occur on the track. They consider the gravitational force's influence on the train's movement and develop a mathematical model that describes this process. The article presents mathematical equations describing the direction of a two-track train in three-dimensional space. They consider the mass of the train, traction forces, air resistance, gravitational force, and reactions from the ground. The authors use numerical methods to solve these equations and conduct computer simulations to study train motion under various conditions. The results of the study demonstrate that the vertical component significantly impacts the movement of a two-track train. It can affect the train's speed, energy efficiency, and stability. The authors conclude with the need to consider the vertical component when building mathematical models of double-track road trains. This paper is essential for researchers and engineers developing and designing road trains. Considering the vertical part will help improve the accuracy of mathematical models and increase the efficiency of two-track road trains in actual operating conditions. The obtained results are essential for developing and improving control systems for two-track road trains, particularly in transport, logistics, and mobile robots. The proposed model can be used to optimize the traffic trajectory and improve the efficiency and safety of the operation of road trains in natural conditions. The proposed model is designed for circular stationary and transient modes of movement of an articulated road train with the possibility of conducting a comparative analysis with a full-scale experiment.*

**Keywords:** *spatial mathematical model, circular modes, vertical oscillations, articulated train.*

---

### Вступ

Процеси урбанізації призводять до перетоку населення з сіл, районів у великі міста, обласні міста та столицю країни. Зростання проживаючого населення у таких містах призводить до підвищення навантаження на пропускну здатність міського автотранспорту. Особливо гостро дана проблема стоїть у містах-мільйонниках. У зв'язку з військовою агресією РФ відбувся суттєвий нерівномірний перерозподіл населення за регіонами України. Суттєвого приросту зазнали великі міста Західної України, що призвело до перенавантаження та ускладнення обслуговування діючим автобусним парком місцевих комунальних підприємств та приватних автоперевізних компаній.

Не дивлячись на вище окреслену ситуацію, в більшості міст України за роки незалежності відбувся поступовий перехід від використання великогабаритного автотранспорту (поступово протягом 20-25 років після становлення незалежності України) до автобусів малого класу. Наразі ситуація змінюється, й маломісткі автобуси замінюють на великогабаритні. Прикладами можуть слугувати міста Олександрія [1], Запоріжжя [2], Хмельницький [3], Дрогобич [4] та ін., міські ради яких затвердили відповідні Програми розвитку та вдосконалення міського пасажирського транспорту міста до 2023-2026 рр. Програми містять перелік таких заходів, як оновлення, модернізацію та заміну існуючого парку, збільшення пасажироперевезень та підвищення пасажиронавантаження на один великогабаритний автобус чи тролейбус тощо.

Найбільш відомими виробниками зчленованих автобусів у світі є наступні компанії: Neoplan (Neoplan GmbH та Viseon Bus GmbH, Німеччина), Компанія VDL Bus & Coach (Нідерланди), Scania (Volkswagen AG, Traton, Швеція), MAN (Volkswagen AG, Traton, Німеччина), CNH Industrial (Велика Британія), Foothill Transit (Сполучені Штати Америки), Proterra (Сполучені Штати Америки), The Mercedes-Benz Group AG (Німеччина) тощо.

Необхідно звернути уваги на перехід від традиційних дизельних двигунів на нові з низьким (що працюють на водні) чи нульовим викидом (що працюють на сонячній енергії) парникових газів, покращуючих вплив на навколишнє природне середовище. Одним з основних компонентів переходу саме до нульової емісії є електричні автобуси.

Зростання трафіку автомобільного транспорту у містах, особливо великих, призводить до ускладнення руху великогабаритного транспорту, у т.ч. автобусів й тролейбусів. Виникає затримка роботи за визначеним маршрутом міського великогабаритного автотранспорту, підвищуються енерговитрати та знижується енергоефективність його роботи, ймовірність зростання дорожньо-транспортних подій тощо. В поведінці реального зчленованого міського автобуса велику роль, в контексті безпеки руху, відіграють показники поворотності та стійкості, на які в свою чергу впливає велика кількість різноманітних параметрів як самого автопотяга, так і умов його експлуатації. В основу математичного моделювання процесів безпеки руху (наїзд на перешкоду, рух по дорожньому полотні з нахилом, різке гальмування) авторами покладено побудову просторової математичної моделі.

Дволанкові автопотяги є складними системами, які використовуються для забезпечення швидкого й ефективного перевезення пасажирів або вантажів. Ці потяги мають не тільки горизонтальну, але й вертикальну складові, що дозволяє їм рухатися по різних рельєфах, таких як підйоми, спуски або повороти. У даній статті розглянуто побудову просторової математичної

---

моделі дволанкового автопотяга з урахуванням вертикальної складової. Ця модель допоможе зрозуміти та прогнозувати рух автопотяга в тривимірному просторі і дозволить враховувати вплив вертикальних змін на його поведінку. Дволанковий автопотяг складається з двох частин (ланок), які з'єднані між собою. Кожна ланка може мати свої незалежні системи керування та приводу. Завдяки цьому потяг може здійснювати рухи, такі як зміна кута повороту, підйом або спуск.

Для побудови просторової математичної моделі дволанкового автопотяга з урахуванням вертикальної складової використовуються основні принципи кінематики та динаміки. Кінематика вивчає рух об'єктів без урахування причин, що його спричиняють. Для опису руху автопотяга використовуються параметри, такі як координати положення, швидкість та прискорення. Динаміка вивчає вплив сил на рух тіл. Для дволанкового автопотяга розглядаються сили, що впливають на кожен ланку окремо, а також на систему в цілому.

Основні елементи моделі:

а) Кінематичні параметри:

- Координати положення кожної ланки в тривимірному просторі.
- Швидкість та прискорення кожної ланки.
- Кути повороту кожної ланки відносно фіксованих координатних вісей.

б) Динамічні параметри:

- Маса кожної ланки та їх розподіл.
- Сили, що впливають на кожен ланку, такі як сили тяжіння, опору повітря, сили приводу та гальмування.

в) Рівняння руху.

З використанням принципів кінематики та динаміки можна записати рівняння руху для кожної ланки окремо та для системи в цілому. Ці рівняння дозволяють прогнозувати рух автопотяга в тривимірному просторі з урахуванням вертикальних змін.

При побудові математичної моделі дволанкового автопотяга з урахуванням вертикальної складової необхідно врахувати вплив підйому, спуску та зміни висоти на рух автопотяга. Для цього використовуються додаткові кінематичні та динамічні параметри.

Кінематичні параметри: додаткові координати, що описують висоту кожної ланки відносно початкової площини або іншої фіксованої точки.

Динамічні параметри: додаткові сили, що впливають на кожен ланку, такі як сила тяжіння та сила опору, які залежать від вертикальної складової.

При врахуванні вертикальної складової важливо враховувати такі фактори, як нахил та крутизна шляху, наявність підйомів або спусків, а також можливість руху по нерівностях. Для цього можна використовувати різні моделі, наприклад:

Модель з урахуванням нахилу шляху: В цій моделі беруться до уваги кути нахилу шляху та гравітаційні сили, що впливають на автопотяг. Це дозволяє враховувати вплив схилів на рух автопотяга та встановити оптимальні параметри для подолання нахилів.

Модель з урахуванням спуску та підйому: У цій моделі враховуються не тільки кути нахилу шляху, але й наявність підйомів та спусків. Це дозволяє враховувати вплив гравітаційних сил та сил опору на рух автопотяга під час підйому та спуску.

Модель з урахуванням нерівностей шляху: Ця модель враховує можливість руху автопотяга по нерівностях шляху, таких як вибоїни або ями. Вона включає параметри, що описують вертикальні зміни поверхні шляху, а також сили, що впливають на автопотяг під час проходження нерівностей.

Модель з урахуванням висоти: Ця модель використовує додаткові координати, що описують висоту кожної ланки автопотяга. Вона враховує вплив зміни висоти на кінематичні та динамічні параметри руху автопотяга.

Побудова просторової математичної моделі дволанкового автопотяга з урахуванням вертикальної складової дозволяє вивчити та прогнозувати його рух в тривимірному просторі. Врахування вертикальної складової є важливим аспектом для ефективності та безпеки руху автопотяга, особливо при русі по шляху з нахилом, спусками або підйомами. Математична модель дозволяє аналізувати та встановлювати оптимальні параметри руху, що призводить до покращення його продуктивності та безпеки.

Науковцями та практиками проведено багато досліджень з використанням математичного апарату для вантажного та пасажирського великогабаритного автотранспорту, що лягли в основу даного дослідження. Так, Сахно В.П., Шарай С.М., Мурований І.С. та Човча І.В. [5] дослідили забезпечення курсової стійкості автопоїздів, результатом чого стала розробка просторової математичної моделі автомобільного поїзда у поперечній площині. Кузьо І.В. та Зінко Р.В. [6], у

свою чергу, звертають увагу на тягово-зчіпні пристрої, в яких об'єднані поступальні та обертальні кінематичні пари для багатосекційних автобусів, тролейбусів, трамваїв, вагонів метро. Для зазначених цілей ними використано наступні програмні продукти: NEWEUL 83, DYNA 3D, PAM-CRASH, RADIOSS та OPTIM.

Шматко Д.З., Сасов О.О. та Бондюк Д.М. [7] у ході дослідження прийшли до висновку, що використання міського пасажирського транспорту потребує відповідної організації руху. Зазначене питання вирішувалося з використанням середнього коефіцієнту заповнення транспортних засобів, оптимізацією пасажиромісткості одиниці транспортного засобу та математичним моделюванням можливого розвитку на перспективу.

Козачок Л.М. та Лісіна О.Ю. [8, 9], використовуючи методи нечіткої логіки, розробили алгоритм пошуку розкладу роботи транспортних засобів на маршруті як послідовності інтервалів обслуговування, що відповідають у ході поставленої задачі нечіткій функції цілі.

Вакуленко К.Є. та Фалецька Г.І. [10] представили математичну модель визначення режиму руху автобусів у міському сполученні. В основу критеріїв покладено індикатори собівартості витрат перевізників та доходи пасажирів.

В серії інших досліджень, проведених за участю авторів [11-14], приділялась увага створенню просторової математичної моделі руху автопотяга, яка б відповідала на зміну бічних сил відведення при зовнішньому (наїзд на перешкоду, рух по дорожньому полотні з нахилом, різке гальмування) та внутрішньому (відцентрові сили при круговому русі) впливі на зміни параметрів руху.

В даному дослідженні буде розглянуто поєднання між собою математичної системи вертикальної динаміки і плоскопаралельного руху і яка б враховувала усі сили та моменти зчленованого автопотяга.

### **Мета статті**

Метою статті є доповнення існуючої плоскої двоколіїної моделі руху зчленованого автопотяга до просторової моделі, шляхом об'єднання двох систем рівняння (рівняння руху та вертикальних коливань), та яка могла б враховувати зміну вертикальних навантажень при зовнішньому впливі на сам зчленований автопотяг.

### **Виклад основного матеріалу дослідження**

Першою складовою повної просторової системи рівнянь руху автопоїзда є рівняння плоскопаралельного руху [11, 15], що враховують усі нелінійності, які притаманні плоскій двоколіїній моделі: фізичні (нелінійні сили відведення) та геометричні (тригонометричні функції як від параметра кута повороту керованого модуля, так і тригонометричних функцій від змінної кута складання) нелінійності. Також необхідно звернути увагу на вибір математичної моделі, в основі якої мають лежати описання способів, процесів, засобів та потрібної вихідної інформації [16]. В роботі [17] зазначено, що плоскопаралельний рух автопоїзда з використанням деяких нестандартних методів дослідження динаміки такого руху дозволяє замінити розв'язування диференціальних рівнянь руху рівнянням головного моменту відносно до центрів коливань миттєвих центрів швидкостей і пришвидшень.

Друга складова просторової моделі утворюються групою рівнянь, що відповідають просторовим коливанням по кутам крену та тангажу обох ланок зчленованого автобуса. Високий рівень формалізму і загальності забезпечує опис дії механізму у формі рівнянь Лагранжа другого роду [18]. Ці рівняння можуть бути отримані на основі формалізації рівнянь Лагранжа другого роду, для чого необхідно визначити кінетичну та потенціальну енергії системи. Коливання по кутам крену та тангажу розглядаються відносно поздовжніх та поперечних осей, що є проєкціями відповідних центральних осей інерції на горизонтальну опорну поверхню (в рамках припущення малих кутів тангажу та крену). Варто зазначити, що просторові коливання зчленованого автобуса залежать від жорсткісних та демпфувальних властивостей підвіски [10, 14, 15]. Прикладом може слугувати стійкість руху, що розглядають для плоскої моделі автопоїзда, що досліджено в [19].

Об'єднання двох підсистем плоскопаралельного руху та вертикальної динаміки проводиться шляхом введення в систему просторового руху моментів сил інерції (поздовжніх та поперечних), які визначаються в плоскій моделі і прикладаються в центрах мас просторової моделі. В свою чергу, отримані в просторовій моделі вертикальні реакції опор використовуються для визначення сил відведення в плоскій моделі. Це наближає нашу математичну модель до реального зчленованого автобуса. Необхідність розвитку та її ефективність буде проілюстровано на прикладі аналізу властивостей поворотності дволанкового автобуса з різними варіантами прикладання тягових зусиль в наступних матеріалах.

Вплив системи вертикальних коливань на плоску модель через доповнення в рівняннях вертикального навантаження на кожне колесо було описано в роботі [13].

Для аналізу повного впливу та взаємодії систем одну на одну додамо до рівнянь вертикальної динаміки сили, що будуть залежати від характеру руху з плоскої моделі. Для цього в рівняння вертикальної динаміки по кутовим координатам  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  (тангажу),  $\psi$ ,  $\psi_1$  (крену), додамо моменти сил інерції, які виникають в моделі плоскопаралельного руху. Висота центра мас для першої ланки  $h_m$  та другої ланки  $h_{m1}$ .

Рівняння по координаті кута  $\varphi$  першої ланки набуде наступного виду:

$$e_2 = J_y \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) - (z(t) + h_m) m u(t) \omega(t) - k_{11} (-a\phi(t) - h\psi(t) + z(t)) a - k_{12} (-a\phi(t) + h\psi(t) + z(t)) a + k_{21} (b\phi(t) - h\psi(t) + z(t)) b + k_{22} (b\phi(t) + h\psi(t) + z(t)) b + k_{31} (c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) c + k_{32} (c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) c - kd_{11} (-a\Phi(t) - h\Psi(t) + Z(t)) a - kd_{12} (-a\Phi(t) + h\Psi(t) + Z(t)) b + kd_{21} (b\Phi(t) - h\Psi(t) + Z(t)) b + kd_{22} (b\Phi(t) + h\Psi(t) + Z(t)) b + kd_{31} (c\Phi(t) - h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) c + kd_{32} (c\Phi(t) + h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) c \quad (1)$$

При складанні диференційного рівняння по швидкості зміни кута галопування другої ланки  $\frac{d}{dt} \Phi_1$ , необхідно визначити додатковий параметр – кутову швидкість другої ланки  $\omega_1$ , яка буде залежити від кутової швидкості першої ланки  $\omega$  та швидкості зміни кута складання  $\dot{\gamma}$ :

$$\omega_1 = \omega(t) - \Gamma(t) \quad (2)$$

$$e_3 = J_{1y} \left( \frac{d}{dt} \Phi_1(t) \right) - (c\phi(t) + d_1\phi_1(t) + z(t) + h_{m1}) m_1 (v \sin \sin \gamma(t) + (u(t) - \omega(t)) c \cos \cos \gamma(t) - (\omega(t) - \Gamma(t)) d_1 - (\omega(t) - \Gamma(t)) b_1) (\omega(t) - \Gamma(t)) + k_{31} (c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) l_1 + k_{32} (c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) l_1 + kd_{31} (c\Phi(t) - h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) l_1 + kd_{32} (c\Phi(t) + h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) l_1 \quad (3)$$

Рівняння по куту  $\psi$  першої ланки набуде наступного виду:

$$e_4 = J_{1x} \left( \frac{d}{dt} \Psi(t) \right) - (z(t) + h_m) m v \omega(t) - k_{11} (-a\phi(t) - h\psi(t) + z(t)) h + k_{12} (-a\phi(t) + h\psi(t) + z(t)) h - k_{21} (b\phi(t) - h\psi(t) + z(t)) h + k_{22} (b\phi(t) + h\psi(t) + z(t)) h - kd_{11} (-a\Phi(t) - h\Psi(t) + Z(t)) h + kd_{12} (-a\Phi(t) + h\Psi(t) + Z(t)) h - kd_{21} (b\Phi(t) - h\Psi(t) + Z(t)) h + kd_{22} (b\Phi(t) + h\Psi(t) + Z(t)) h \quad (4)$$

Рівняння по куту  $\psi_1$  другої ланки набуде наступного виду:

$$e_5 = J_{1x} \left( \frac{d}{dt} \Psi_1(t) \right) - (c\phi(t) + d_1\phi_1(t) + z(t) + h_{m1}) m_1 (v \cos \cos \gamma(t) - (u(t) - \omega(t)) c \sin \sin \gamma(t)) (\omega(t) - \Gamma(t)) - k_{31} (c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) h + k_{32} (c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) h - kd_{31} (c\Phi(t) - h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) h + kd_{32} (c\Phi(t) + h\Psi_1(t) + l_1\Phi_1(t) + Z(t)) h \quad (5)$$

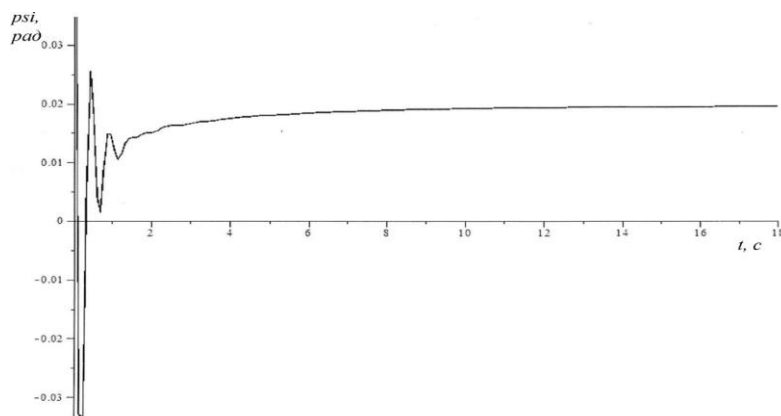


Рис. 1. Зміна кутової координати по крену першої ланки  $\psi$

$\psi_{10}$  коливання згасають та стають рівними та значенням близьким до  $0,0175 \text{ рад} \approx 1^\circ$ , але до нульового положення стану спокою не повертаються внаслідок дії моментів сил інерції у кожній ланці автопоїзда.

Проілюструємо чисельний аналіз системи при реалізації стаціонарного кругового руху на прикладі кутової координати крену першої ланки  $\psi$  та другої ланки  $\psi_1$  (рис. 1).

Рух автопоїзда проходить на максимальних значеннях швидкості за умов стійкого кругового руху зі сталим радіусом, з первинними збудженнями по координатам  $\psi_0, \psi_{10}$ .

Як слідує з наведених графіків, після початкового збудження по координатам  $\psi_0,$

Розглянемо, як впливають сили інерції на перерозподіл вертикального навантаження в стаціонарних кругових режимах на прикладі осі другої ланки автопоїзда  $z_{21}$  та  $z_{22}$  з певними початковими збудженнями по координатам  $\psi_0, \psi_{10}$  (рис. 3).

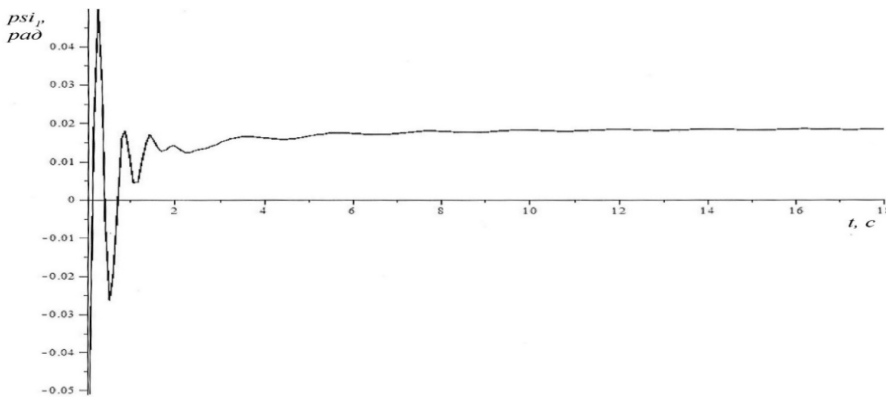


Рис. 2. Зміна кутової координати по крену другої ланки  $\psi_1$

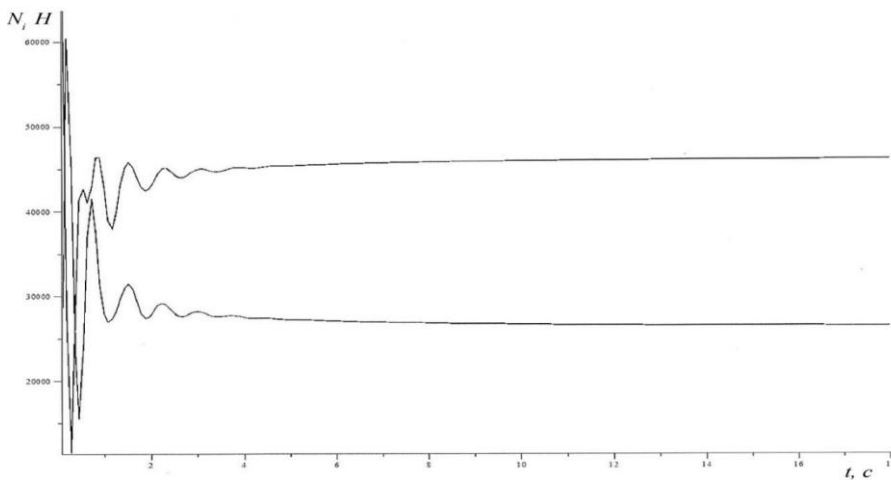


Рис. 3. Зміна вертикальних навантажень на осі другої ланки автопоїзда у стаціонарних кругових режимах з початковими збудженнями по координатам  $\psi_0, \psi_{10}$

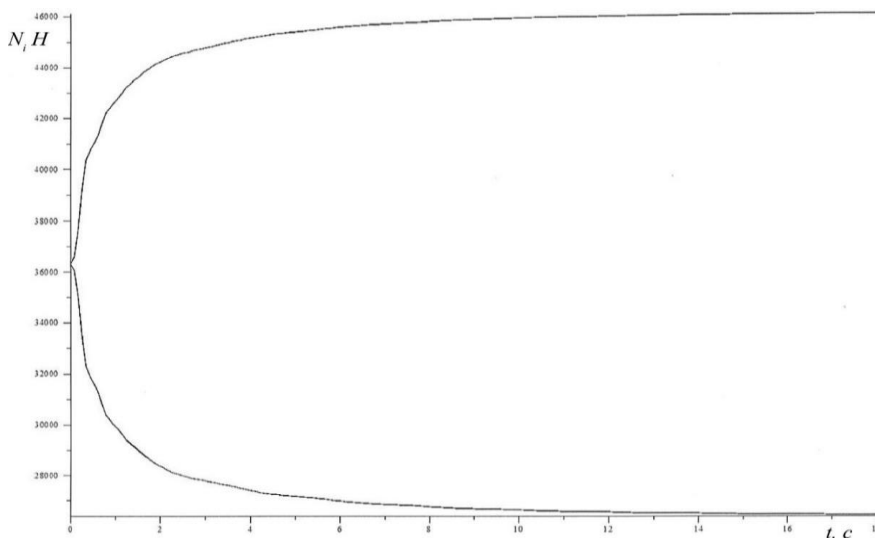


Рис. 4. Зміна вертикальних навантажень на колеса осі другої ланки в стаціонарних кругових режимах без початкових збуджень

На графіку чітко просліджується вплив сил інерції та початкового збудження на перерозподіл навантажень для коліс осі другої ланки.

Як бачимо з рис. 4, характер кривих при великих значеннях часу співпадає, криві виходять з однієї точки, що свідчить про рівність навантажень на колеса однієї осі для різних бортів в момент початку руху (коли сили інерції відсутні) та їхньому поступовому росту через виникнення відцентрових сил, що співпадають з поведінкою реального автопотяга.

**Обговорення.** Поступове зростання зчеплених автопоїздів у світі, особливо електричних моделей та наводні (в таких країнах, як Китайська Народна Республіка, США, Європейський Союз, Перу, Колумбія, Бразилія, Мексика тощо), демонструє важливість та пріоритетність даного питання на сьогоднішній день та на перспективу [22]. Поряд з цим, потребують детального дослідження існуючих плоских двоколієних моделей руху зчленованих автопотягів до просторової моделі. Серед іншого, деталізуючи вище наведене, потрібно приділяти увагу таким їх складовим як маневровість [23], що дозволяє визначити кут повороту та необхідну швидкість у ситуації гальмування та тягловому режимі й впливає на стійкість автопотягу. Якщо ж відбувається

нерівномірний перерозподіл гальмування на осі автобуса, а отже й колеса, то знижується ефективність гальмівної системи, що призводить до низького рівня стійкості автопотяга [19]. Окрім робочої та стоянкової системи гальм, кожен автопоїзд повинен мати також й запасну [24].

---

## Висновки та перспективи подальших розвідок

В даній роботі продемонстровано доповнення до існуючої просторової моделі руху автопотяга, яка враховує взаємний перерозподіл та вплив вертикальних коливань на керованість плоскопаралельного руху досліджуваного автопотяга. В наступних матеріалах буде продемонстрована зміна властивостей поворотності дволанкового автобуса з різними варіантами прикладання тягових або гальмівних зусиль.

## Список літератури

1. Олександрійська міська рада. Про затвердження Програми розвитку муніципального автомобільного пасажирського транспорту Олександрійської територіальної громади. URL: [https://olexrada.gov.ua/base/project/rada/proekt\\_r\\_3810.pdf](https://olexrada.gov.ua/base/project/rada/proekt_r_3810.pdf).
2. Запорізька міська рада. Про затвердження Програми розвитку та вдосконалення пасажирського транспорту в місті Запоріжжі на 2021-2023 роки. 2021. URL: <https://zp.gov.ua/uk/sessions/114/resolution/45901>.
3. Хмельницька міська рада. Про затвердження Програми розвитку та вдосконалення міського пасажирського транспорту міста Хмельницького на 2019-2023 роки. URL: <https://www.khm.gov.ua/uk/content/prozatverdzhennya-programy-rozvytku-ta-vdoskonalennya-miskogo-pasazhyrskogo-transportu-0>.
4. Дрогобицька міська рада. Про затвердження Програми розвитку та вдосконалення міського пасажирського транспорту міста Дрогобича на 2020-2023 роки. URL: <https://doc.drohobych-rada.gov.ua/про-затвердження-програми-розвитку-т/>.
5. Сахно В.П., Шарай С.М., Мурований І.С., Човча І.В. До розробки математичної моделі автопоїзда з причепом категорії О1 у поперечній площині. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2021. № 17. Том 2. с. 151-160.
6. Кузьо І.В., Зінько Р.В. Моделювання руху розчленованих транспортних засобів. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2012. №2. с. 42-49.
7. Shmatko D., Sasov A., Bondyuk D. Increasing the efficiency of using public buses on the transportation routes of the city of Kamianske. *Математичне моделювання*. 2022. № 2(47). с. 70-75.
8. Козачок Л.М. Моделювання руху пасажирського транспорту для побудови розкладу роботи на маршруті за допомогою алгоритмізації управління. *Автомобіль і електроніка. Сучасні технології*. 2016. Вип. 9. с. 70-74.
9. Козачок Л.М., Лісіна О.Ю. Моделювання нечітких процесів управління транспортними системами пасажирських перевезень. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 48. с. 57-64.
10. Вакуленко К.Є., Фалецька Г.І. Вибір режиму руху автобусів у міському сполученні. *Збірник наукових праць УкрДАЗТ*. 2014. Вип. 148. Ч. 1. с. 176-181.
11. Вербицький В. Г., Хребет В. Г., Місько Є. М. Біфуркаційний підхід до аналізу дивергентної втрати стійкості нелінійної моделі колісного екіпажа за наявності постійного силового збурення. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2020. №1 (14). с. 43-48.
12. Кузьо І. В., Житенко О. В. Просторова модель колісного транспортного засобу з використанням Matlab simulink. *Науковий вісник НЛТУ України*. 2012. Вип. 22.6. с. 300-307.
13. Вербицький В.Г. Влияние перераспределения нагрузок по осям на критическую скорость прямолинейного движения автомобиля. *Вісник Донецької академії автомобільного транспорту*. 2009. № 2. с. 58-67.
14. Місько Є.М. Ідентифікація параметра демпфірування пневмодпідвіски міського автобуса. *Вісник ХНАДУ*. 2016. Вип. 74. с. 106-109.
15. Бондаренко А.Є., Вербицький В.Г., Хребет В.Г., Місько Є.М. Експериментальне визначення залежностей сил відведення дволанкового автопоїзда. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2018. № 2(11). С. 34-37.
16. Житенко О.В. Сучасний стан дослідження коливань та плавності ходу колісних транспортних засобів. *Науковий вісник НЛТУ України*. 2008. Вип. 18.10. с. 103-107.
17. Цідило І. В., Левчук К. Г. Деякі особливості плоскопаралельного руху тіла. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*. 2012. № 1. с. 35-47.
18. Гашук П.М., Нікіпчук С.В. Алгоритм структурування трансмісії мобільних машин у середовищі автоматизованого проектування. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2018. Вип. 15. с. 124-146.
19. Сахно В.П., Поляков В.М., Стельмашук В.В., Попелиш Д.М. До визначення стійкості руху триланкового причіпного автопоїзда у гальмівному режимі. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. 2022. № 1.18. с. 143-154.
20. Місько Е.М. Исследование жесткостных характеристик подвески городского автобуса МАЗ-105. *Вестник ДААТ*. 2014. № 2-3. с. 68-72.
21. Сахно В.П. Місько Є. М. Ідентифікація параметра жорсткості підвіски колісного транспортного засобу. *Наукові нотатки*. 2016. Вип. 55. с. 355-359.
22. Electric bus, main fleets and projects around the world. Sustainable Bus. URL: [https://www.sustainable-bus.com/electric-bus/electric-bus-public-transport-main-fleets-projects-around-world/?fbclid=IwAR0dXNzWRlXJEJcm9LNEPIVh5y\\_trdygYvnLxjd\\_OKJ5vdBJ5augakqSluo](https://www.sustainable-bus.com/electric-bus/electric-bus-public-transport-main-fleets-projects-around-world/?fbclid=IwAR0dXNzWRlXJEJcm9LNEPIVh5y_trdygYvnLxjd_OKJ5vdBJ5augakqSluo).
23. Бобошко О. А. Наукові основи підвищення показників маневреності автомобілів: дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю: 05.22.02. Автомобілі та трактори (274. Автомобільний транспорт). Харків: Харківський національний автомобільно-дорожній університет МОН України. 2019. 332 с.
24. Богомолів В.О., Леонтьєв Д.М. Щодо питання підвищення ефективності дії гальмового керування транспортного засобу з пневматичним гальмовим приводом. *Автомобільний транспорт в аграрному секторі: проектування, дизайн та технологічна експлуатація: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції*. Харків: ХНТУСГ, 2019. с. 72-73.

---

## References

1. Oleksandrijs'ka mis'ka rada. Pro zatverdzhennia Prohramy rozvytku munitsypal'noho avtomobil'noho pasazhyrs'koho transportu Oleksandrijs'koi terytorial'noi hromady. Website [Oleksandriysk City Council. On the approval of the Program for the Development of Municipal Automobile Passenger Transport of the Oleksandriysk Territorial Community]. Available at: [https://olexrada.gov.ua/base/project/rada/proekt\\_r\\_3810.pdf](https://olexrada.gov.ua/base/project/rada/proekt_r_3810.pdf).
2. Zaporiz'ka mis'ka rada. Pro zatverdzhennia Prohramy rozvytku ta vdoskonalennia pasazhyrs'koho transportu v misti Zaporizhzhia na 2021-2023 roky. (2021). Website. [Zaporizhzhia City Council. On the approval of the Program for the development and improvement of passenger transport in the city of Zaporizhzhia for 2021-2023]. Available at: <https://zp.gov.ua/uk/sessions/114/resolution/45901>.
3. Khmel'nyts'ka mis'ka rada. Pro zatverdzhennia Prohramy rozvytku ta vdoskonalennia mis'koho pasazhyrs'koho transportu mista Khmel'nyts'koho na 2019-2023 rr. Website. [Khmelnytskyi City Council. On the approval of the Program for the Development and Improvement of Urban Passenger Transport of the City of Khmelnytskyi for 2019-2023]. Available at: <https://www.khm.gov.ua/uk/content/pro-zatverdzhennya-programy-rozvytku-ta-vdoskonalennya-miskogo-pasazhyrskogo-transportu-0>.
4. Drohobys'ts'ka mis'ka rada. Pro zatverdzhennia Prohramy rozvytku ta vdoskonalennia mis'koho pasazhyrs'koho transportu mista Drohobycha na 2020-2023 rr. Website. [Drohobys'tsk City Council. On the approval of the Program for the Development and Improvement of Urban Passenger Transport of the City of Drohobych for 2020-2023]. Available at: <https://doc.drohobych-rada.gov.ua/pro-zatverdzhennia-prohramy-rozvytku-t/>.
5. Sakhno, V.P., Sharaj, S.M., Murovanyj, I.S., Chovcha, I.V. (2021). «To the development of a mathematical model of a road train with a category O1 trailer in the transverse plane». *Suchasni tekhnologii v mashynobuduvanni ta transporti*. № 17. vol 2. pp. 151-160. Available at: <https://doi.org/10.36910/automash.v2i17.645>.
6. Kuz'o, I.V., Zin'ko, R.V. (2012). «Modeling the movement of articulated vehicles». *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiiakh*. №2. pp. 42-49.
7. Shmatko D., Sasov A., Bondyuk D. (2022). «Increasing the efficiency of using public buses on the transportation routes of the city of Kamianske». *Matematychni modeliuvannia*. № 2 (47). pp. 70-75. URL: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.2\(47\)2022.268389](https://doi.org/10.31319/2519-8106.2(47)2022.268389).
8. Kozachok L.M. (2016). «Modeling the movement of passenger transport for the construction of the work schedule on the route with the help of control algorithms». *Avtomobil' i elektronika. Suchasni tekhnologii*. Issue 9, pp. 70-74.
9. Kozachok, L.M., Lisina, O.Yu. (2020). «Modeling of fuzzy management processes of transport systems of passenger transportation». *Visnyk Kharkivs'koho natsional'noho universytetu imeni V. N. Karazina. Seriya «Matematychni modeliuvannia. Informatsijni tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia»*. Issue 48, pp. 57-64.
10. Vakulenko, K.Ye., Falets'ka, H.I. (2014). «The choice of the mode of operation of buses in city traffic». *Zbirnyk naukovykh prats' UkrDAZT*. Issue 148. part. 1, pp.176-181.
11. Verbyts'kyj, V. H., Khrebet, V. H., Mis'ko, Ye. M. (2020). «Bifurcation approach to the analysis of divergent loss of stability of a nonlinear model of a wheeled crew in the presence of a constant force disturbance». *Suchasni tekhnologii v mashynobuduvanni ta transporti*. №1 (14), pp.43-48.
12. Kuz'o, I. V., Zhytenko, O. V. (2012). «Spatial model of a wheeled vehicle using Matlab simulink». *Naukovyj visnyk NLTU Ukrainy*. Issue 22.6, pp. 300-307.
13. Verbyts'kyj V.H. (2009). «The effect of axle load redistribution on the critical speed of straight-line car movement». *Visnyk Donets'koi akademii avtomobil'noho transportu*. № 2, pp. 58-67.
14. Mis'ko Ye.M. (2016). «Identification of the damping parameter of the air suspension of a city bus». *Visnyk KhNADU*. Issue 74, pp. 106-109.
15. Bondarenko, A.Ye., Verbyts'kyj, V.H., Khrebet, V.H., Mis'ko, Ye.M. (2018). «Experimental determination of the dependences of the deflection forces of a two-track road train». *Suchasni tekhnologii v mashynobuduvanni ta transporti*. № 2(11), pp. 34-37.
16. Zhytenko, O.V. (2008). «The current state of the study of oscillations and smoothness of wheeled vehicles». *Naukovyj visnyk NLTU Ukrainy*. Issue. 18.10. pp.103-107.
17. Tsidylo, I. V., Levchuk, K. H. (2012). «Some features of plane-parallel body motion». *Prykarpats'kyj visnyk NTSh. Chyslo*. № 1, pp. 35-47.
18. Haschuk, P.M., Nikipchuk S.V. (2018). «Algorithm for structuring transmissions of mobile machines in the automated design environment». *Visnyk L'vivs'koho derzhavnoho universytetu bezpeky zhyttiedial'nosti*. Issue. 15. pp.124-146.
19. Sakhno, V.P., Poliakov, V.M., Stel'maschuk, V.V., Popelysh, D.M. (2022). «To determine the stability of the movement of a three-link trailer train in braking mode». *Suchasni tekhnologii v mashynobuduvanni ta transporti*. № 1.18, pp.143-154.
20. Mys'ko, E.M. (2014). «Investigation of stiffness characteristics of the MAZ-105 city bus suspension». *Vestnyk DAAT*. № 2-3, pp. 68-72.
21. Sakhno V.P. Mis'ko Ye. M. (2016). «Identification of the stiffness parameter of the suspension of a wheeled vehicle». *Naukovi notatky*. Issue 55, pp.355-359.
22. Electric bus, main fleets and projects around the world. Sustainable Bus. Website. Available at: [https://www.sustainable-bus.com/electric-bus/electric-bus-public-transport-main-fleets-projects-around-world/?fbclid=IwAR0dXNzWRiXJEJcm9LNEPIVh5y\\_trdygYvnLxjd\\_OKJ5vdBJ5augakqSluo](https://www.sustainable-bus.com/electric-bus/electric-bus-public-transport-main-fleets-projects-around-world/?fbclid=IwAR0dXNzWRiXJEJcm9LNEPIVh5y_trdygYvnLxjd_OKJ5vdBJ5augakqSluo).
23. Boboshko, O. A. (2019). *Naukovi osnovy pidvyschennia pokaznykiv manevrenosti avtomobiliv*. [Scientific basis of increasing car maneuverability indicators]. Ph.D. technical sciences: 05.22.02. Avtomobili ta traktory (274. Avtomobil'nyj transport). Kharkiv. Ukraine.
24. Bohomolov, V.O., Leont'iev, D.M. (2019). «Regarding the issue of increasing the effectiveness of the brake control of a vehicle with a pneumatic brake drive». *Avtomobil'nyj transport v ahrarnomu sektori: proektuvannia, dyzajn ta tekhnologichna ekspluatatsiia*. [Schodo pytannia pidvyschennia efektyvnosti dii hal'movoho keruvannia transportnoho zasobu z pnevmatychnym hal'movym pryvodom]. Proceeding of the Materials of the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference. Kharkiv: KhNTUSH. pp. 72-73.

Стаття надійшла до редакції 06.03.2023 р.